MÉTODOS PROBABILÍSTICOS EN TEORÍA COMBINATORIA

César Bravo[1]

La teoría de la computación, conocida también como computabilidad, es el estudio de la capacidad de cálculo de los modelos del computador.

Entre dichos modelos podemos mencionar: autómatas finitos, autómatas de pila y máquinas de Turing. Como ejemplo de la capacidad de cálculo de estos modelos vale recordar que las máquinas de Turing consiguen evaluar polinomios con coeficientes enteros en valores enteros.

En general se puede decir que para evaluar la capacidad de cálculo de estos modelos hay que determinar si el modelo en cuestión es capaz o no de calcular una determinada clase de funciones (en el ejemplo, polinomios).

Una fuente natural de funciones «arduas» (difíciles de calcular), es la teoría combinatoria. En términos generales, se puede decir que la teoría combinatoria estudia las configuraciones de conjuntos discretos.

Vamos a presentar un problema clásico en teoría combinatoria para después atacar su complejidad de dos maneras: una determinística y otra probabilística.

DEFINICIÓN

Un grafo G=(V,E) está formado por un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas entre vértices.

Un grafo sobre **n** vértices es un grafo cuyo conjunto de vértices tiene cardinalidad **n**.

Un grafo completo sobre **n** vértices es un grafo sobre **n** vértices en el que todo par de vértices está unido por una arista. Se denota K^n.

Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, un isomorfismo entre G_1 y G_2 es un par de funciones biyectivas f, g tales que $f: V_1 \rightarrow V_2$ y $g: E_1 \rightarrow E_2$ conserven la adyacencia de vértices: esto es,

$$xy \in E_1 \quad \text{(ssi)} \quad g(xy) = f(x)f(y) \in E_2$$

OBSERVACIÓN

Todos los grafos completos sobre **n** vértices son isomorfos. Por lo tanto, podemos hablar del grafo completo K^n.

DEFINICIÓN

Una 2-coloración de aristas de $K^n = (VK^n, EK^n)$, es una función $f : EK^n \rightarrow \{0, 1\}$. También podría ser

$$f : EK^n \rightarrow \{\text{azul, rojo}\}.$$

Dada una 2-coloración f de aristas de K^n, un subgrafo completo monocromático de K^n está conformado por un subconjunto de vértices de K^n, cuyas aristas tienen todas el mismo color, según f.

PROBLEMA

Dada una 2-coloración de aristas de K^n caracterizar los subgrafos completos monocromáticos.

El enunciado del teorema que sigue parece una digresión fuera de nuestro tema; la técnica de demostración de este resultado es, sin embargo, la base de la teoría determinística para este problema.

TEOREMA: (RAMSEY, 1930)

En cualquier grupo de 6 personas:

Hay 3 que se conocen mutuamente, o bien, hay 3 que no se conocen entre sí, y 6 es el mínimo número de personas con esta propiedad.

Demostración

Sólo nos interesa la simetría de la relación de conocimiento, descartamos reflexividad y transitividad.

Así, la primera afirmación significa que existe un grupo de 3 personas en el que cualquiera de ellas conoce a las otras 2.

---

1. Magister en Ciencias de Computación.

Vamos a poner este problema en notación de grafos.

Considere una 2-coloración f de K = (V,E): f: E $\rightarrow$ {azul, rojo}

Las vértices de K^n representan personas y un arista azul entre 2 vértices significa que las personas representadas por esos vértices se conocen. Si la arista es roja, las personas no se conocen.

Fije ahora un vértice x. Existen necesariamente 3 aristas del mismo color incidiendo en x, digamos que existen 3 aristas xy, xz, xw con f(xy)=f(xz)=f(xw)=azul.

Si alguna arista yz, yw, zw es azul, entonces tenemos la primera afirmación.

En caso contrario, las aristas yz, yw ,zw son rojas y tenemos la segunda afirmación.

Un pentágono azul prueba la afirmación final.

$\square$

Generalizamos ahora el enunciado del problema resuelto por el teorema anterior.

Definición

El número de Ramsey de 2 variables.

Para s, t $\in N^+$

R(s,t) = min { n $\in N^+$: Para toda 2 - coloración de aristas de K^n.

Existe un K^s monocromático.

o bien

Existe un K^t monocromático}

Determinar los valores de esta función R(s,t) es un problema difícil y en general no resuelto; lo mejor que se conoce son cotas superiores o inferiores.

El siguiente resultado se prueba mediante una sencilla generalización de la demostración del teorema anterior.

TEOREMA: (ERDO"S & SZEKERES, 1935; GREENWOOD & GLEASON, 1955)

Para 2 enteros $s \geq 2$ y $t \geq 2$

$$R(s, t) \leq R(s-1) + R(s, t-1)$$

Más todavía: Si R(s-1, t), R(s, t-1) son números pares entonces la desigualdad es estricta.

Construyendo algunos grafos y con la ayuda de este teorema se pueden tabular unos pocos números de Ramsey:

s\t	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18			
5	1	5	14				
6	1	6	18				
7	1	7	23				

Sin embargo, como veremos pronto, de R(5,5) sólo se sabe $42 \leq R(5,5) \leq 55$ y hay pocas esperanzas de calcular R(6,6).

El teorema anterior y un argumento basado en inducción matemática, permiten probar la siguiente cota superior.

Teorema: Si s, t son 2 enteros, s 2, t 2.

$$R(S,T) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

Este teorema y la aproximación de Stirling permiten obtener la siguiente cota para el caso diagonal:

$$(K, K) \leq \binom{2k-2}{k-1} \sim C \frac{4^k}{\sqrt{k}} \text{ , donde } c > 0$$

Para acotar inferiormente R(k,k) se tiene el siguiente resultado probabilístico.

Teorema (Erdo"s, 1947):

Si $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ entonces k (k , k) > n

DEMOSTRACIÓN:

Considere una 2-coloración f de las aristas de K^n Prob (Existe un K^k monocromática)

$$= \sum \{\text{Prob } (f(K^k i) = \text{rojo}) + \text{Prob } (f(K^k i) = \text{azul})\}$$

$K^k i \subset k^n$

$1 \leq i \leq \binom{n}{k}$

$$= \binom{n}{k} \{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \} = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

La condición de la hipótesis es impuesta para que el número arriba pueda ser interpretado como una probabilidad.

$\square$

Cálculos estándar muestran que:

$$R(K,K)>n \sim \left(\frac{k}{e}\right) 2^{k/2}$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{k}{e}\right)^{1/k} \sqrt{2} < (R(k,k))^{1/k} < C \frac{4}{(k)^{1/2k}}$$

Y no se conoce mejor aproximación. Cerramos estos comentarios mencionando que la demostración anterior puede modificarse para obtener la siguiente acotación de R(s,t):

Teorema: Sea $p \in [0,1]$.

Si $\binom{n}{s} p^{\binom{s}{2}} + \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}} < 1$ entonces $R(s,t) > n$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA

BONDY, J. A. Y MURTY, U.S.R. **Graph Theory with aplications.** Macmillan 1976

SPENCER, JOEL. **Ten Lectures on the Probabilistic Method.** SIAM, 1987