Ciencias, n.°4, (2020)
ISSN-L 2521-537X

Generalización de la derivada clásica a derivada de orden arbitrario

Generalization of the classical derivative to arbitrary order derivative

[1]Jhony Alfonso Chávez Delgado ORCID: 0000-0001-6512-2285
[2]Luis Alberto Chávez Delgado ORCID: 0000-0003-0217-1738
[3] Luis Asunción López Puycan ORCID: 0000-0003-4454-6737

RESUMEN

El propósito de este artículo fue desarrollar un estudio analítico de la generalización de la derivada clásica de Newton-Leibniz al operador lineal de derivación de orden arbitrario de Riemann-Liouville sobre un intervalo finito [a, b] en el que se investigó la posibilidad y las consecuencias de dar valores reales al índice de n- iteraciones de este operador de derivación. Se empleó el método deductivo e inductivo en la que se demostró y ejemplificó el operador derivación de orden arbitrario. Como resultado, se generalizó la teoría básica de las diversas iteraciones de la derivada de orden ordinario, el uso de la función Euleriana y la integral de orden arbitrario, la cual fue base para formular la definición del operador lineal de derivación de orden arbitrario a partir de la n-ésima derivada iterada ordinaria de una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ que tiene n-ésima derivada continua en [a, b] y se demostró la linealidad del operador de derivación de orden arbitrario ejemplificando las proposiciones de este operador generalizado, aplicado a la función potencia y logarítmica. Finalmente, mostraremos algunas soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de orden arbitrario con coeficiente constantes asociado a un determinado polinomio inicial.

Palabras claves: Derivada de orden arbitrario, derivada generalizada de una potencia, derivada generalizada de un logaritmo, ecuaciones diferenciales de orden arbitrario

ABSTRACT

The purpose of this article is to develop an analytical study of the generalization of the classic derivative of Newton-Leibniz to the linear operator of arbitrary derivation of Riemann-Liouville on a finite interval [a, b], which investigates the possibility and the consequences of giving real values to the index of n-iterations of this derivation operator. In this sense, we present the basic theory of the various iterations of the ordinary order derivative, the use of the gamma function and the arbitrary integral, which is the basis for formulating the definition of the linear derivative operator of arbitrary order. Starting from the n-th iterated ordinary derivative of a function $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ having n-th continuous derivative in [a, b]. Then, the demonstrations of the linearity of the derivative operator of arbitrary order are made, and the exemplifications of the propositions of this generalized operator applied to the power and logarithmic function. Finally we exemplify some solutions of linear differential equations of arbitrary order with constant coefficient with a determined initial polynomial.

Keywords: Derivative of arbitrary order, generalized derivative of a power, generalized derivative of a logarithm, linear differential equations of arbitrary order.

[1] Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna, Perú. E-mail: jchavezd@unjbg.edu.pe
[2] Universidad Cesar Vallejo. Chimbote, Perú. E-mail: lachd_1908@hotmail.com
[3] Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna, Perú. E-mail: llopezp@unjbg.edu.pe

Presentado: 1/10/2020 Aprobado: 30/11/2020

INTRODUCCIÓN

En el estudio de la derivada clásica, los estudiantes de ciencias e ingeniería, solucionan operadores diferenciales $D^1f, D^2f, D^3f, D^4f, \ldots$ de las funciones potencia, logarítmica, etc., pero algunos, sin embargo, reflexionan sobre si es necesario que el orden de la derivada sea un número no natural, se cuestionan como L'Hopital, en la carta que le dirige a Leibniz: ¿Qué sucedería si los operadores de la derivada de la función logarítmica y potencia fueran $D^{1/2}f$, $D^{2/3}f \ldots$? Pregunta que permite extraer interesantes resultados en el presente artículo.

A partir de aquí, el cálculo de la derivada y la integral de Newton-Leibniz como rama del análisis matemático, a través del tiempo, ha sido estudiada por reconocidos matemáticos quienes han contribuido al desarrollo de lo que hoy conocemos como derivada de orden arbitrario o derivada generalizada que tiene interés en las órdenes de los operadores de derivación e integración. Entre ellos, destacamos a Euler (1738), Liouville (1832) & Riemann (1876). Así mismo, Bertram (1975), Miller & Ross (1993), Samko, Kilbas & Marichev (1993), Bonilla, Kilbas & Trujillo (2003), Arafet, Domínguez & Chang (2008), Santanu (2011).

El propósito de este artículo es establecer la generalización de la derivada clásica de orden entero de Newton-Leibniz a orden fraccionario de Riemann-Liouville, utilizando como base la integral arbitraria de Riemann-Liouville. Además, demostrar que existe más de una manera de calcular la derivada clásica a orden arbitrario, usando un operador lineal de derivación.

Este artículo se justifica porque la teoría de la derivada generalizada pretende ser un campo de acción, donde se incluya las ecuaciones diferenciales ordinarias y la transformada de Laplace de orden fraccionario asociado a la función de Miller y Ross, y sobre todo que estas ecuaciones tienen aplicaciones a la dinámica de una esfera inmersa en un fluido viscoso incomprensible. Procesos oscilatorios con amortiguación fraccionaria de Kilbas & Trujillo (2003). Así como también, a la ingeniería de control y procesamiento de señales (Ortigueira, 2011).

A pesar de la gran cantidad de publicaciones en este campo, se siente la necesidad de formalizar y ordenar los conceptos, proposiciones y ejemplificaciones de la derivada generalizada, para hacerla más atractiva y de fácil acceso a los investigadores de otras ciencias puras y aplicadas, como: Matemática, Física, Química, Biología, Economía, etc.

MARCO TEÓRICO

Algunas funciones especiales

En esta parte del artículo se recuerdan las definiciones y algunas propiedades básicas de ciertas funciones especiales útiles en el desarrollo de la derivada de orden arbitrario.

Definición (función Euleriana)

Sea $x > 0$. A la función integral $\Gamma: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

, se le denomina función gamma de Euler.

Propiedades de la función gamma de Euler
Sea $x > 0$**,** entonces, se verifica que:
(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ , x > 0$
(ii) Si x es un entero no negativo, entonces,

$$\Gamma(x+1) = x!$$

(ii) Si x es un entero positivo, entonces,

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2x)!\sqrt{\pi}}{2^{2x}x!} \quad .$$

Bell (1968), y Levedev (1972).

Definición (Función Beta)
Sea $x > 0$ e $y > 0$.A la función integral $\mathbf{B}: \mathbb{R}^{+}x\mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$B(x,y) = \int_{0}^{1} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}dt$$

, se le denomina función Beta de Euler.
Chaudhry & Zubair (2002).

Propiedades de la función Beta de Euler
Sea $x > 0$ e $y > 0$, entonces, se verifica que:
(i) $B(x,y) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(x)\boldsymbol{\Gamma}(y)}{\boldsymbol{\Gamma}(x+y)}$
(ii)$B(x,y) = B(y,x)$

Tabla 1
Valores de la función gamma de Euler

$\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\ , x > 0$
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1{,}2254\ldots$
$\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = 1{,}1287\ldots$
$\Gamma\left(\frac{7}{6}\right) = 0{,}9277\ldots$
$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2{,}6789385\ldots$
$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = 0{,}8930\ldots$
$\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) = 0{,}9407\ldots$

Fuente: Elaboración propia

Definición (función ψ de Euler)
La función Psi, es la función $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:
$\psi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d}{dz}\Gamma(z)$, $z > 0$.
También se le conoce como la función digamma.
Chaudhry & Zubair (2002).

Propiedades de la función Psi
(i) $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$, $z > 0$
(ii) $\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma$**,** donde
$\gamma \approx 0{,}57721566490153286060651209 0 \ldots$

(iii) Si $\alpha > -1$ y $\beta > -1$, entonces,

$\int_0^1 \frac{z^\alpha - z^\beta}{1-z} dz = \psi(\beta+1) - \psi(\alpha+1)$.

Chaudhry & Zubair (2002).

Tabla 2
Valores de la Función Psi de Euler

$\psi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d}{dz}\Gamma(z), \qquad z > 0$
$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma$, $(n = 1,2,3, \ldots)$
$\psi(1/2) = -\gamma - 2\ln 2$
$\psi(1/3) = -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3$
$\psi(2/3) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3$
$\psi(1/4) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2$
$\psi(1) = -\gamma$

Fuente: Chaudhry & Zubair (2002).

Algunos espacios de funciones
Espacio $L^p([a,b])$
Sea $p \geq 1$. El espacio de funciones integrables en $[a,b]$, denotado por $L^p([a,b])$**,** se define $L^p([a,b]) :=$
$$\left\{ \begin{array}{c} f: [a,b] \to \mathbb{R} \backslash f \text{es medible sobre } [a,b], \\ \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \end{array} \right\}$$
Espacio $C^m([a,b])$
Sea $m \in \mathbb{N}$. El espacio de funciones continuas en $[a,b]$, denotado por $\boldsymbol{C^m([a,b])}$ se define: $C^m([a,b]) := \{f: [a,b] \to \mathbb{R} / f \text{ tiene } m - \text{ésima derivada continua}\}$
Bowers (2010).

Integral de orden arbitrario de Riemann-Liouville
Definición (Integral de orden arbitrario Riemann-Liouville)
Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. El operador de integración de orden arbitrario, denotado por ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}$, es del tipo Riemann-Liouville de orden α de una función $f \in L^1[a;b]$ si:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)ds \ (a \leq x \leq b) $$

Propiedades de la integral de orden arbitrario Riemann Liouville
(i) Sea f una función tales que $f(x) = (x-a)^{\beta}$,
$\beta > 1, \alpha > 0$ y $x > a$, entonces, se verifica que:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} $$

(ii) Sea f una función tales que $f(x) = \ln(x-a)$, $x > a$, entonces, se verifica que:
$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} (\ln(x-a)) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} [\ln(x-a) - \gamma - \psi(\alpha+1)] $$
Miller & Ross (1993).

Ecuaciones diferenciales lineales arbitrarias
Función de Miller-Ross. La función E_t definida por:

$$ E_t(\nu, a) = t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\nu+k+1)} $$

, se denomina función de Miller-Ross.

Propiedades de la función de Miller-Ross
(i) $E_t(0,a) = e^{at}$
(ii) $E_t(-1,a) = aE_t(0,a)$

Transformada de Laplace de la derivada arbitraria
Supongamos que la transformada de Laplace de f(x) existe, luego:
(i) $\mathcal{L}\{D^{\alpha}F(x)\} = s^{\alpha}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{k-n+\alpha}F(0)$,
$n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{L}\{D^{\alpha}F(x)\} = s^{\alpha}f(s) - D^{-(1-\alpha)}F(0), 0 < \alpha \leq 1$.

Transformada de Laplace de la función de Miller-Ross
$\mathcal{L}\{E_t(\nu,a)\} = \frac{1}{s^{\nu}(s-a)}$
Transformada Inversa de Laplace

$$ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\nu}(s-a)^2}\right\} = tE_t(\nu,a) - \nu E_t(\nu+1,a) $$

$$, \nu > -2. $$

$$ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\nu}(s-a)}\right\} = E_t(\nu,a) $$

Miller & Ross (1993).

MATERIAL Y MÉTODOS

Nuestro material de estudio es el operador lineal de derivación, aplicada a una función real f sobre un intervalo finito [a, b]. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ el mayor entero. La derivada arbitraria de orden α de una función $f \in C^n[a;b]$, está dada por el operador lineal

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \quad \alpha > 0. $$

Se empleó para el desarrollo del artículo, los métodos lógicos: inductivo y deductivo. El método deductivo es utilizado para justificar matemáticamente las condiciones suficientes de las propiedades de la derivada de orden arbitrario y el método inductivo es para contrastar el funcionamiento de dichas condiciones utilizando funciones conocidas.

RESULTADOS

Operador de derivación de orden arbitrario:
Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f \in C^n[a,b]$. Entonces, $\forall x \in [a,b]$

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = D^n\left({}_aI_x^{(n-\alpha)} f(x) \right). $$

, donde ${}_aI_x^{(n-\alpha)}$ representa la integral arbitraria de Riemann-Liouville.

Linealidad del operador de derivación de orden arbitrario:
Sean f y g$\in L^1[a,b]$. Luego, para
$a \leq x \leq b$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, tenemos:
(i) ${}_aD_x^\alpha(f+g)(x) = {}_aD_x^\alpha f(x) + {}_aD_x^\alpha g(x)$,
(ii) ${}_aD_x^\alpha \lambda f(x) = \lambda\, {}_aD_x^\alpha f(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
, se cumple casi para todo en [a, b].

Operador de derivación de orden arbitrario de una función potencial:
Sea f$\in L^1[a,b]$ tales que:
$f(x) = (x-a)^{\beta-1}, \beta > 1, \quad \alpha > 0, \ x > a$. Entonces,

$$ {}_aD_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} $$

Operador de derivación de orden arbitrario de una función logarítmica:
Sea f$\in L^1[a,b]$ tal que
$f(x) = (x-a)^\beta, \alpha > 0$ y $x > a$
Entonces,

$$ {}_aD_x^\alpha(\ln(x-a)) = $$
$$ = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(1-\alpha)] $$

Ecuación diferencial lineal de orden arbitrario con polinomio inicial de raíces diferentes:
La solución explícita de una ecuación diferencial lineal arbitraria:
$\left(D^1 + 3D^{1/2} + 2D^0\right)y(t) = 0$, de orden (2,2) con polinomio inicial.
$P(x) = x^2 + 3x + 2$, es

$y(t) = k\left[-E_t(0,1) + 2E_t(0,4) + E_t\left(-\frac{1}{2},1\right) - \, -E_t(-1/2,4)\right]$
, donde $k = Y(0) + 3D^{-\frac{1}{2}}Y(0)$

Ecuación diferencial lineal de orden arbitrario con polinomio inicial de raíces iguales:
La solución explicita de una ecuación diferencial lineal arbitraria:

$$\left(D^1 + 2D^{1/2} + D^0\right)y(t) = 0$$

, de orden (2,2), con polinomio inicial

$$P(x) = x^2 + 2x + 1$$

Es:
$y(t) = k\left[(1 + 2t)E_t\,(0,1) + E_t\,\left(\frac{1}{2},1\right) + +2tE_t\,(-1/2,1)\right]$, con $k = Y(0) + 2D^{-\frac{1}{2}}Y(0)$

DISCUSIÓN

Operador de derivación del orden arbitrario:
Proposición (Relación de la derivada clásica y la derivada generalizada)
Sea f una función tal que $f(x) = (x-a)^m$, entonces, se verifica que :

$$D^n(x-a)^m = \frac{m!}{(m-n)!}(x-a)^{m-n}; m, n \in \mathbb{Z}^+ ,$$

$m \geq n, x > a$
Generalizando la derivada, tenemos:
$${}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1};$$
$\beta > 1, \alpha \in \mathbb{R}^+, \beta > \alpha$

Prueba
La demostración se obtiene a partir de la derivada clásica de las potencias de $(x-a)^m$ $(m \in \mathbb{Z}^+)$:
$D^0(x-a)^m = (x-a)^m,$
$D^1(x-a)^m = m(x-a)^{m-1},$
$D^2(x-a)^m = m(m-1)(x-a)^{m-2},$
$\quad \vdots$
$D^n x^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(x-a)^{m-n}$
Multiplicando a la ecuación anterior al numerador y al denominador por $(m-n)!$, se tiene:

$D^n(x-a)^m =$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)}{(m-n)(m-n-1)\ldots1}(x-a)^{m-n}$$

$$D^n(x-a)^m = \frac{m!}{(m-n)!}(x-a)^{m-n} \;, m, n \in \mathbb{Z}^+,$$
$m \geq n$ y $x > a$

Aplicando las propiedades de la función Gamma, se tiene:

$$D^n(x-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}(x-a)^{m-n} \ ,$$

$m, n \in \mathbb{Z}^+ \ , m \geq n, x > a$

Cuando m y n no sean naturales podemos extender la idea de la derivada de orden arbitrario o generalizado de un gran número de funciones continuas

$$_aD_x^\alpha(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \ ,$$

$\beta > 1, \alpha \in \mathbb{R}^+ \ , \beta > \alpha$ y $x > a$

Relacionando la derivada clásica y la derivada de orden arbitrario

$$_aD_x^\alpha(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(k-\alpha+\beta)}{\Gamma(k-\alpha+\beta)\Gamma(k-\alpha+\beta-k)}(x-a)^{k-\alpha+\beta-k-1}$$

Pero, se sabe que

$$_aD_x^k(x-a)^{k-\alpha+\beta-1} = \frac{\Gamma(k-\alpha+\beta)}{\Gamma(k-\alpha+\beta-k)}(x-a)^{k-\alpha+\beta-1}$$

Entonces,

$$_aD_x^\alpha(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(k-\alpha+\beta)}\ {}_aD_x^k(x-a)^{k-\alpha+\beta-1}$$

$$= {}_aD_x^k\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(k-\alpha+\beta)}(x-a)^{k-\alpha+\beta-1}\right)$$

Por las propiedades de la integral arbitraria, tenemos:

$$_aI_x^{k-\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(k-\alpha+\beta)}(x-a)^{k-\alpha+\beta-1}$$

Por lo tanto,

$$_aD_x^\alpha(x-a)^{\beta-1} = {}_aD_x^k\left({}_aI_x^{k-\alpha}(x-a)^{\beta-1}\right), \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Definición (Operador de derivación de orden arbitrario Riemann-Liouville).
Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f \in C^n[a,b]$. Entonces, $\forall x \in [a,b]$

$$_aD_x^\alpha f(x) = D^n\left({}_aI_x^{(n-\alpha)}f(x)\right).$$

, donde $_aI_x^{(n-\alpha)}$ representa la integral arbitraria de Riemann-Liouville

Observaciones

(i) $n = [\![\alpha]\!] + 1$

(ii) El operador de derivación arbitrario también se puede escribir de la siguiente forma:

$$_aD_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[{}_aI_x^{(n-\alpha)}f(x)\right], \alpha > 0,$$

$$= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt\right), \alpha > 0,$$

Ejemplo (Operador de derivación de orden arbitrario de una función potencial)
Sean $\alpha = \frac{2}{3}$ y a=4. Calcular la derivada arbitraria de $f(x) = (x-4)^{1/2}$

Solución

Por definición de la derivada de orden arbitrario:

$$_aD_x^\alpha f(x) = D^n\left({}_aI_x^{(n-\alpha)}f(x)\right)$$

Se sabe que $n = \left[\!\left[\frac{2}{3}\right]\!\right] + 1 = 1$

Reemplazando en la definición

$$ {}_4D_x^{\frac{2}{3}}f(x) = D\left({}_4I_x^{\left(1-\frac{2}{3}\right)} f(x) \right) $$

$$ = D\left({}_4I_x^{1/3}\, (x-4)^{1/2} \right) $$

$$ = D\left({}_4I_x^{1/3}\, (x-4)^{1/2} \right) $$

De las propiedades de la integral generalizada, tenemos:

$$ = D\left(\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2+1/3)} (x-4)^{3/2+1/3-1} \right) $$

$$ = D\left(\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(11/6)} (x-4)^{5/6} \right) $$

Por la propiedad de la función Gamma y la tabla 1, se obtienen:

$$ = D\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2(0,9407\ldots)} (x-4)^{5/6} \right) $$

$$ = \frac{5\sqrt{\pi}}{12(0,9407\ldots)} (x-4)^{-1/6} $$

$$ = 0.7851\ldots (x-4)^{-1/6} $$

Ejemplo (Operador de derivación de orden arbitrario de la función logaritmo)

$\alpha = \frac{2}{3}$ $y\ a = 2$. Calcular la derivada arbitraria de $f(x) = \ln(x-2)$.

Solución

Por definición de la derivada de orden arbitrario, se tiene:

$$ {}_aD_x^{\alpha}f(x) = D^n\left({}_aI_x^{(n-\alpha)} f(x) \right) $$

Se sabe que n=$\left[\!\left[\frac{2}{3}\right]\!\right] + 1 = 1$

Reemplazando en la definición

$$ {}_2D_x^{\frac{2}{3}}f(x) = D\left({}_2I_x^{\left(1-\frac{2}{3}\right)} f(x) \right) $$

$$ {}_2D_x^{\frac{2}{3}}f(x) = D\left({}_2I_x^{1/3}\, f(x) \right) $$

$$ = D\left({}_2I_x^{1/3}\, \ln(x-2) \right) $$

De las propiedades de la integral arbitraria, se obtienen:

$$ = D\left(\frac{(x-2)^{1/3}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left[\ln(x-2) - \gamma - \psi(\tfrac{1}{3}+1) \right] \right) $$

Por las propiedades de la función digamma, de la función gamma, y las tablas 1 y 2, tenemos:

$$= \mathrm{D}\left(\frac{(x-2)^{1/3}}{\Gamma(\frac{4}{3})}\left[\ln(x-2)-\gamma-(\psi(\frac{1}{3})+3)\right]\right)$$

$$= \mathrm{D}\left(\frac{(x-2)^{1/3}}{\Gamma(\frac{4}{3})}\left[\ln(x-2)-\gamma-(-\gamma-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}ln3+3)\right]\right)$$

$$= \mathrm{D}\left(\frac{(x-2)^{1/3}}{\Gamma(\frac{4}{3})}\left[\ln(x-2)+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}ln3-3\right]\right)$$

$$= \mathrm{D}\left(\frac{(x-2)^{1/3}}{0{,}8930\ldots}\left[\ln(x-2)+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}ln3-3\right]\right)$$

$$= \frac{(x-2)^{-2/3}}{3(0{,}8930\ldots)}\left[\ln(x-2)+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}ln3-3\right]$$

$$+\frac{(x-2)^{-2/3}}{0{,}8930}$$

$$=\frac{(x-2)^{-2/3}}{2{,}6789\ldots}\left[\ln(x-2)+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}ln3\right]$$

Linealidad del operador de derivación de orden arbitrario:
Proposición (Linealidad del operador de derivación de orden arbitrario)

Sean f y gϵ $L^1[a,b]$, $a \le x \le b$ y $\alpha\epsilon\mathbb{R}^+$ entonces, se verifica que:
(i) ${}_a\mathrm{D}_x^{\alpha}(f+g)(x) = {}_a\mathrm{D}_x^{\alpha}f(x) + {}_a\mathrm{D}_x^{\alpha}g(x)$,
(ii) ${}_a\mathrm{D}_x^{\alpha}\lambda f(x) = \lambda\, {}_a\mathrm{D}_x^{\alpha}f(x)$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$
, se cumple casi para todo en [a, b]

Demostración
Por definición de derivada de orden arbitrario, tenemos:

$${}_a\mathrm{D}_x^{\alpha}(f+g)(x) = \mathrm{D}^n\left[\, {}_a\mathrm{I}_x^{(n-\alpha)}(f+g)(x)\right]$$

$$= \mathrm{D}^n[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(f+g)(t)dt$$

$$= \quad \mathrm{D}^n[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}g(t)dt\,]$$

$$= \mathrm{D}^n[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt] +$$

$$+ D^n[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)dt]$$

$$= D^n[\,_aI_x^{(n-\alpha)} f(x)] + D^n[\,_aI_x^{(n-\alpha)} g(x)]$$

$$= \,_aD_x^\alpha f(x) + \,_aD_x^\alpha g(x)$$

Por lo tanto,

$$_aD_x^\alpha (f+g)(x) = \,_aD_x^\alpha f(x) + \,_aD_x^\alpha g(x).$$

De igual manera, por definición de la derivada generalizada, se tiene:

$$_aD_x^\alpha \lambda f(x) = D^n\left[\,_aI_x^{(n-\alpha)} \lambda f(x)\right]$$

$$= D^n[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \lambda f(t)dt],$$

$$= D^n[\lambda\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt],$$

$$= \lambda D^n[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt],$$

$$= \lambda D^n\left[\,_aI_x^{(n-\alpha)} f(x)\right]$$

Por lo tanto,

$$_aD_x^\alpha \lambda f(x) = \lambda\,_aD_x^\alpha f(x)\,, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Operador de derivación de orden arbitrario de una función potencial:
Proposición (Derivación de orden arbitrario de la función potencia).
Sea $f \in L^1[a,b]$ tal que $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$,
$\beta > 1, \alpha > 0 \quad, x > a$. Entonces,

$$_aD_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

Demostración

Para determinar la derivada de orden arbitrario de la función:

$$f(x) = (x-a)^{\beta-1}$$

, es necesario considerar la propiedad de la integral de orden arbitrario:

$$_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1},$$

Luego,

$$_aD_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = D^n\,_aI_x^{(n-\propto)}(x-a)^{\beta-1}$$

, donde $n = [\![\alpha]\!]+1$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} D^n (x-a)^{n-\alpha+\beta-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha+\beta)}(x-a)^{-\alpha+\beta-1}.$$

Por lo tanto,

$$_aD_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

Ejemplo (Operador de derivación de orden arbitrario de una función potencial)
Sea $\alpha = \frac{2}{3}$ y $a = 4$

Calcular la derivada arbitraria de $f(x) = (x-4)^{1/2}$.

Solución

Por la proposición de la derivada de orden arbitrario de la función potencia, tenemos:

$$_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

$$_4D_x^{2/3}(x-4)^{\frac{3}{2}-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)}(x-4)^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(5/6)}(x-4)^{-\frac{1}{6}}$$

Finalmente, con las propiedades de la función Gamma y la tabla 1, se obtienen:

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2(1{,}1287\ldots)}(x-4)^{-1/6}$$

$$= 0{,}7851..(x-4)^{-1/6}$$

Operador de derivación de orden arbitrario de una función logarítmica:
Proposición (Derivada de orden arbitrario de la función logaritmo)

Sea $f \in L^1[a,b]$ tal que $f(x) = \ln(x-a)$, $x > a$. Entonces,

$$_aD_x^{\alpha}(\ln(x-a)) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(1-\alpha)]$$

Demostración

Para determinar la derivada de orden arbitrario de la función:

$$f(x) = \ln(x-a)$$

, es necesario considerar las propiedades que tiene la integral de orden arbitrario:

$$_aI_x^{\alpha}(\ln(x-a)) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(\alpha+1)]$$

Luego, por definición de derivada de orden arbitraria, donde $n = [\![\alpha]\!]+1$ se tiene:

$$_aD_x^{\alpha}(\ln(x-a)) = D^n\left({}_aI_x^{(n-\alpha)}\ln(x-a)\right),$$

$$= D^n\left[\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(n-\alpha+1)]\right]$$

Utilizando la regla de Leibniz:

Sean $f, g \in C^N[a,b]$,

$$D^N fg(x) = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} D^{N-n} f(x) D^n g(x), N \in \mathbb{N}$$

, y por la proposición de la derivada de orden arbitrario de la función potencia, se obtiene la derivada de orden arbitrario de la función logaritmo

$$_aD_x^{\alpha}(\ln(x-a)) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(1-\alpha)]$$

Ejemplo (Operador de derivación de orden arbitrario de una función logarítmica)
Sea $\alpha = \frac{2}{3}$ y $a = 2$. Calcular la derivada arbitraria de orden de $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x} - 2)$

Solución
Por la proposición de la derivada de orden arbitrario de la función logaritmo, tenemos:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathrm{D}_{\mathrm{x}}^{\alpha}(\ln(x-a)) = $$

$$ = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(1-\alpha)] $$

$$ {}_{2}\mathrm{D}_{\mathrm{x}}^{2/3}(\ln(x-2)) = $$

$$ \frac{(x-2)^{-2/3}}{\Gamma(1-2/3)}[\ln(x-2) - \gamma - \psi(-2/3)] $$

$$ = \frac{(\mathrm{x}-2)^{-2/3}}{\Gamma(1/3)}[\ln(\mathrm{x}-2) - \gamma - \psi(1/3)] $$

Finalmente, por las propiedades de la función Gamma y la tabla 1, se obtienen:

$$ = \frac{(\mathrm{x}-2)^{-2/3}}{2{,}6789\ldots}\left[\ln(\mathrm{x}-2) - \gamma - (-\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3)\right] $$

$$ = \frac{(\mathrm{x}-2)^{-2/3}}{2{,}6789\ldots}\left[\ln(\mathrm{x}-2) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\ln 3)\right] $$

Ecuación diferencial lineal de orden arbitrario con polinomio inicial de raíces diferentes:

Consideremos la ecuación diferencial lineal arbitraria (EDLA) con coeficientes constantes de orden (2,2):

$\left(\mathrm{D}^1 + 3\mathrm{D}^{1/2} + 2\mathrm{D}^0\right)\mathrm{Y(t)} = 0$, con polinomio inicial $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2$.

Tomando la transformada de Laplace en la EDLA:

$$ \mathcal{L}\left\{D^1(Y(t)) + 3D^{1/2}(Y(t)) + 2Y(t)\right\} = \mathcal{L}\{0\} $$

$$ \mathcal{L}\{D^1 Y(t)\} + 3\mathcal{L}\left\{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y(t)}\right\} + 2\mathcal{L}\{Y(t)\} = 0 $$

$$ [\mathrm{sy(s)} - \mathrm{Y(0)}] + 3\mathcal{L}\left\{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y(t)}\right\} + 2\mathrm{y(s)} = 0 $$

Por la propiedad de la transformada de Laplace de la derivada de orden arbitrario, se obtiene:

$$ \mathcal{L}\left\{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Y(t)}\right\} = \mathrm{s}^{\frac{1}{2}}\mathrm{y(s)} - \mathrm{D}^{-\left(1-\frac{1}{2}\right)}\mathrm{Y(0)} $$

Reemplazando, tenemos:

$$ \mathrm{sy(s)} - \mathrm{Y(0)} + 3\left(\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}\mathrm{y(s)} - \mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Y(0)}\right) + 2\mathrm{y(s)} = 0 $$

, reordenando:

$$\left(s + 3s^{\frac{1}{2}} + 2\right)y(s) - Y(0) - 3D^{-\frac{1}{2}}Y(0) = 0.$$

Luego,

$$y(s) = \frac{Y(0)+3D^{-\frac{1}{2}}Y(0)}{s+3s^{1/2}+2}.$$

Haciendo $k = Y(0) + 3D^{-\frac{1}{2}}Y(0)$, y supongamos que k es una constante finita no nula.
Luego,

$$y(s) = \frac{k}{s + 3s^{1/2} + 2}$$

Consideremos el polinomio inicial:

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$= \frac{1}{(-1--2)}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right).$$

$$\frac{1}{P(s^{1/2})} = \frac{1}{(-1+2)}\left(\frac{1}{s^{1/2}+1} - \frac{1}{s^{1/2}+2}\right).$$

Aplicando la transformación inversa de la Laplace: $\frac{1}{(s^{1/2}+1)}$

Para ello, se hace la siguiente descomposición:

$$\frac{1}{(s^{1/2}+1)} = \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)} - \frac{1}{s-1}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)} - \frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

Aplicando la propiedad de la inversa de Laplace, se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}+1)}\right\} = E_t\left(-\frac{1}{2}, 1\right) - E_t\ (0,1).$$

De igual manera se aplica la transformada inversa de Laplace a $\frac{1}{(s^{1/2}+2)}$

Para ello, hacemos la siguiente descomposición:

$$\frac{1}{(s^{1/2}+2)} = \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-4)} - \frac{2}{s-4}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-4)} - \frac{2}{s-4}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-4)}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$$

Aplicando la propiedad de la inversa de Laplace, se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}+2)}\right\} = E_t\left(-\frac{1}{2},4\right) - 2E_t\ (0,4).$$

Luego, la solución tomaría la forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = k\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s^{1/2})}\right\} = \left(\frac{k}{-1+2}\right)\left(-E_t(0,1) + 2E_t(0,4) + E_t\left(-\frac{1}{2},1\right) - E_t(-1/2,4)\right)$$

Por lo tanto, la solución sería:

$$y(t) = k\left(-E_t(0,1) + 2E_t(0,4) + E_t\left(-\frac{1}{2},1\right) - E_t(-1/2,4)\right)$$

, donde $k = Y(0) + 3D^{-\frac{1}{2}}Y(0)$

Ecuación diferencial lineal de orden arbitrario con polinomio inicial de raíces diferentes:

Consideremos la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden (2,2):
$\left(D^1 + 2D^{1/2} + D^0\right)Y(t) = 0$, con polinomio inicial $P(x) = x^2 + 2x + 1$

Tomando la transformada de Laplace en la EDL:

$$\mathcal{L}\left\{D^1(Y(t)) + 2D^{1/2}(Y(t)) + Y(t)\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$
$$\mathcal{L}\{D^1Y(t)\} + 2\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}Y(t)\right\} + \mathcal{L}\{Y(t)\} = 0$$
$$[sy(s) - Y(0)] + 2\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}Y(t)\right\} + y(s) = 0$$

Por la propiedad de la transformada de Laplace de la derivada de orden arbitrario, se obtiene:

$$\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}Y(t)\right\} = s^{\frac{1}{2}}y(s) - D^{-\left(1-\frac{1}{2}\right)}Y(0)$$

Reemplazando, se obtiene:

$$sy(s) - Y(0) + 2\left(s^{\frac{1}{2}}y(s) - D^{-\frac{1}{2}}Y(0)\right) + y(s) = 0$$

, reordenando:

$$\left(s+2s^{\frac{1}{2}}+1\right)y(s)-Y(0)-2D^{-\frac{1}{2}}Y(0)=0.$$

Luego,

$$y(s)=\frac{Y(0)+2D^{-\frac{1}{2}}Y(0)}{s+2s^{1/2}+1}.$$

Haciendo $k=Y(0)+2D^{-\frac{1}{2}}Y(0)$, y supondremos que es una constante finita no nula. Luego, $y(s)=\frac{k}{s+2s^{1/2}+1}$

$$=\frac{k}{\left(s^{\frac{1}{2}}+1\right)^{2}}=k\left(\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)}-\frac{1}{s-1}\right)^{2}.$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros:

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}=k\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}(s-1)}-\frac{1}{s-1}\right)^{2}\right\}$$

$$=k\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1}\,(s-1)^{2}}\right\}+2k\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1/2}\,(s-1)^{2}}\right\}++k\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^{2}}\right\}$$

Usando el resultado de la propiedad de la transformada de Laplace, se obtiene:

$$y(t)=k\left[tE_t(-1,1)+E_t\,(0,1)+2\left(tE_t\left(-\frac{1}{2},1\right)+\frac{1}{2}E_t\,\left(\frac{1}{2},1\right)\right)+tE_t\,(0,1)\right]$$

Luego, usando la propiedad de la función de Miller-Ross, se obtiene:

$$y(t)=k\left[(1+2t)E_t\,(0,1)+E_t\,(\frac{1}{2},1)+2tE_t\,(-1/2,1)\right]$$

, donde $k=Y(0)+2D^{-\frac{1}{2}}Y(0)$

CONCLUSIONES

El operador lineal de derivación de orden arbitrario es una generalización de la derivada clásica.
El desarrollo de la teoría de Riemann y Liouville que definieron una integral y una derivada de orden arbitrario es el punto de partida para las ecuaciones diferenciales de orden generalizado

REFERENCIAS

Arafet, P., Dominguez A.& Chang, F.(2008). *Una introducción al cálculo fraccionario.* Cuba: Universidad del Oriente.

Bell, W. (1968). *Special functions for Scientists and Engineers.* D. Van Nostrand Company Ltd.

Bonilla, Kilbas, A., & Trujillo, J. (2003). *Cálculo fraccionario y ecuaciones diferenciales fraccionarias. Edit.* UNED: Madrid.

Bowers, A, & Kalton, N. (2010). *An introductory course in functional Analysis*. France: Springer.

Chaudhry, M. A. & Zubair, S. M. (2002). *On a class of incomplete gamma functions with applications.* United States of America: Academic Press, INC.

Euler.L.(1738). *De Progressionibus Transcentibus, sev Quarum Termini Algebraice Dari Nequeunt*. Comment. Acad. Sci. Imperiales Petropolitane 5**,** 38-57.

Levedev, N. (1972). *Special functions and their applications.* First. London: Prentice-Hall, INC.

Liouville, J. (1832). *Memoire sur quelques Quéstion de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveu genre de Calcul pour resudre ces Quéstion*. J. Ecole Polytech, 13(21), 1-69.

Miller, K. &Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* Wiley and Sons: New York.

Ortigueira, M. (2011). *Fractional calculus for scientists and engineers*. 84th ed. Portugal: Springer.

Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. 9ª ed. México: Pearson-Education.

Riemann, B. (1876). *Versuch einer allegemeinen auffasung der integration und differentiation*. Gesammelte Werke, 331-344.

Samko, S., Kilbas, A. & Marichev, O. (1993). *Fractional integrals and derivatives: theory applications. Gordon and Breach. New York*.

Santanu, D. (2011). *Functional fractional calculus*. Second. India: Springer. VPO.