Ciencias, Vol. 03 (2019) (66-74)
ISSN 2521-537X Versión impresa
ISSN 2706-6320 Versión electrónica
DOI:

Existencia de soluciones óptimas de programas matemáticos no lineales

Existence of optimal solutions of non-linear mathematical programs

[1]Jhony Alfonso Chávez Delgado, [2]Hernan Enrique Lupaca Mamani

RESUMEN

El propósito de este artículo es establecer condiciones para la existencia de soluciones óptimas de programas matemáticos no lineales dada la limitación que presenta el método de resolución gráfica cuando el número de variables de decisión es mayor que dos, entonces se dispuso de criterios más generales que garanticen la existencia de soluciones óptimas en programas matemáticos no lineales que surgen de forma inevitable en la aplicación a la ingeniería, tales como diseño de estructuras para la aviación y diseño de estructuras civiles. Se estableció que, si una función real de variable vectorial está definida en un conjunto de soluciones factibles cerrado y acotado, el programa no lineal es convexo. Así mismo, cuando el número de variables de decisión es mayor que dos la formulación y resolución computacional de programas matemáticos no lineales se resolvió utilizando el software Lingo. Se empleo en el desarrollo del trabajo de investigación el método lógico deductivo, apoyado en la teoría axiomática, para obtener condiciones sobre la existencia de soluciones óptimas en programas matemáticos no lineales. Finalmente se contrasto las demostraciones usando ejemplos conocidos de programas matemáticos no lineales y utilizando el software Lingo.

Palabras clave: programas matemáticos no lineales, existencia de soluciones óptimas, programación convexa, teorema de Weierstrass

ABSTRACT

The purpose of this article is to establish conditions for the existence of optimal solutions of non-linear mathematical programs given the limitation of the graphic resolution method when the number of decision variables is greater than two, then there are general criteria that guarantee the existence of optimal solutions in non-linear mathematical programs that inevitably arise in the application to engineering, such as design of structures for aviation and design of civil structures. It was established that if a real vector variable function is defined in a set of closed and bounded feasible solutions, the nonlinear program is convex. Likewise, when the number of decision variables is greater than two, the formulation and computational resolution of nonlinear mathematical programs was solved using the software Lingo. The deductive logical method, based on axiomatic theory, was used in the development of research work to obtain conditions on the existence of optimal solutions in nonlinear mathematical programs. Finally, the demonstrations were contrasted using known examples of nonlinear mathematical programs and using the software Lingo.

Keywords: non-linear mathematical programs, existence of optimal solutions, convex programming, Weierstrass theorem

[1]Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna - Perú. E-mail: jchavezd@unjbg.edu.pe
[2]Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Tacna - Perú. E-mail: hlupaca29@gmail.com

Presentado: 12/07/19 **Aprobado:** 03/10/19

INTRODUCCIÓN

La programación matemática no lineal intenta dar respuesta a un tipo general de problemas donde se desea elegir el mejor entre un conjunto de elementos, en su forma más simple, el problema equivale a resolver una ecuación de este tipo

$$\begin{cases} Max(Min)\, f(x) \\ x \in S \quad \subset^{n} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, {}_{n} \quad) \qquad x \end{cases}$$

Algunas veces es posible expresar el conjunto de restricciones como solución de un sistema de igualdades o desigualdades

$$\begin{cases} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

Un problema de programación matemática no lineal trata de tomar una decisión óptima para maximizar (ganancia, velocidad, eficiencia, etc.) o minimizar en un criterio determinado (costo, tiempo, riesgo, error, etc.) las restricciones que significan que no cualquier decisión es posible.

Ante un problema óptimo parece razonable preguntarse en primer lugar sobre que variables podemos decidir. Una vez identificada las variables de decisión nos preguntamos cual es criterio que nos permita elegir la mejor decisión de acuerdo al objetivo que se pretende alcanzar. Es conveniente conocer cuáles son las distintas opciones disponibles, es decir, los valores posibles de las variables de decisión para que la solución de programas no lineales sea óptima. Estas condiciones es una generalización del método de los multiplicadores de Lagrange (1901).

Una vez expresado en términos matemáticos el problema que pretendemos resolver, nos preguntamos si tiene solución y en caso afirmativo, cuál es su localización. Cuando tenemos un programa matemático no lineal con dos variables de decisión su resolución gráfica puede darnos la respuesta. Dada la limitación que presenta el método de resolución gráfica cuando el número de variables de decisión es mayor que dos, conviene disponer de criterios generales que garanticen la existencia de soluciones óptimas de programas matemáticos no lineales. Los teoremas de Weierstrass (1894) y fundamental de la programación de la Programación convexa proporcionan condiciones suficientes de la existencia de óptimos globales y de globalidad de las soluciones de un programa matemático (Barbolla, 2001).

Este articulo contribuye a investigar las soluciones optimas de programas no lineales que ha sido estudiada por investigadores como Avriel (2003), Bertsekas (1999), Chiang (1987), Hiller (1967), Intriligator (1973), Nocedal (1999), Taha (1995) y otros.

CONJUNTO CONVEXO Y FUNCIONES

Definición (Conjunto Convexo)

Un subconjunto C en $\mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si $\forall \overline{x}, \overline{y} \in C, \forall \lambda \in [0,1]$ se verifica

$$\overline{z} = \lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{y} \in C$$

(Guerrero, 1997)

Definición (Segmento cerrado)

Se denomina segmento cerrado de extremos $\overline{x}, \overline{y}$ al conjunto

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \left\{ \overline{z} \in \mathbb{R}^n / \overline{z} = \lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{y}, \lambda \in [0,1] \right\}$$

(Guerrero, 1997)

Definición (Segunda definición de Conjunto Convexo) C es convexo si y solo si $\forall \lambda \in [0,1], \forall \overline{x}, \overline{y} \in C$ se tiene $[\overline{x}, \overline{y}] \subset C.$

(Guerrero, 1997)

Definición (Combinación lineal)

Dado un conjunto $M = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\}$ de elementos de $\mathbb{R}^m$ se dice que

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_m \overline{x}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{x}_i$$

Es una combinación lineal de los elementos de M si $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m}$

(Guerrero, 1997)

Definición (Combinación lineal no negativa)

Dado un conjunto $M = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\}$, de elementos de ^{m} se dice que

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_m \overline{x}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{x}_i$$

, es una combinación lineal no negativa de los elementos de M si $\alpha_i \geq 0, i = \overline{1,m}$

(Guerrero, 1997)

Definición (Combinación lineal convexa)

Dado un conjunto $M = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\}$, de elementos de $\mathbb{R}^m$ se dice que

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_m \overline{x}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{x}_i$$

, es una combinación lineal convexa de los elementos de M si y solo si

$$\alpha_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, i = \overline{1,m}$$

(Balbas, 1987)

Proposición (convexidad) Sean X_1 y X_2 dos conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, se verifica que:

$X_1 \cap X_2$ convexo

$X_1 + X_2 = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 / \exists x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 ; \bar{x} = x_1 + x_2 \right\}$ convexo

(Balbas, 1987)

Definición (funciones convexas)

Sea M un conjunto convexo y no vació de $\mathbb{R}^n$. La función $f : M \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si $\forall \bar{x}, \bar{y} \in M \; \forall \lambda \in [0,1]$ se cumple:

$$f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}) \le \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{y})$$

(Apostol, 1973)

Definición (funciones cóncavas)

Sea M un conjunto convexo y no vació de $\mathbb{R}^n$. La función $f : M \to \mathbb{R}$ es cóncava si y solo si $\forall \bar{x}, \bar{y} \in M \; \forall \lambda \in [0,1]$ se cumple:

$$f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}) \ge \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{y})$$

(Apostol, 1973)

Definición (funciones estrictamente convexas)

Sea M un conjunto convexo y no vació de $\mathbb{R}^n$. La función $f : M \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa si y sólo si $\forall \bar{x}, \bar{y} \in M$ con $\bar{x} \ne \bar{y}, \forall \lambda \in (0,1)$ se cumple:

$$f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}) < \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{y})$$

(Apostol, 1973)

Definición (funciones estrictamente cóncavas)

Sea M un conjunto convexo y no vació de $\mathbb{R}^n$. La función $f : M \to \mathbb{R}$ es estrictamente cóncava $\forall \bar{x}, \bar{y} \in M$ con $\bar{x} \ne \bar{y}, \forall \lambda \in (0,1)$ se cumple:

$$f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}) > \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{y})$$

(Apostol, 1973)

MATERIALES Y MÉTODOS

Para nuestro artículo es considerado material de estudio los programas no lineales que admiten la siguiente formulación general:

$$(P)\begin{cases} Opt\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ s.a \\ h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \\ \\ h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \\ \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \end{cases}$$

En esta formulación $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$, son funciones con valores reales de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se empleó en el desarrollo del articulo el método lógico deductivo apoyado en la teoría axiomática para obtener condiciones sobre existencia de óptimos globales en programas matemáticos no lineales.

RESULTADOS

Resolución Gráfica de Programas Matemáticos no lineales

La resolución grafica de programas matemáticos no lineales en el plano admiten la siguiente formulación general.

$$(P)\begin{cases} Opt\ f(x_1, x_2) \\ s.a \\ h_1(x_1, x_2) \le 0 \\ h_2(x_1, x_2) \le 0 \\ g_1(x_1, x_2) \ge 0 \\ h_2(x_1, x_2) \ge 0 \end{cases}$$

En esta formulación, $f, h_i, h_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, i = \overline{1,2}, j = \overline{1,2}$, son funciones con valores reales de las variables x_1, x_2.

Condiciones de globalidad de programas matemáticos

Criterios de máximos y mínimos globales:

Sea $f: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en B, es cerrada y acotada. Entonces existen:

$\bar{x}^* \in B$ tal que: $f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x}), \forall \bar{x} \in B$

$\bar{x}^\circ \in B$ tal que: $f(\bar{x}^\circ) \geq f(\bar{x}), \forall \bar{x} \in B$

Es decir,

$\bar{x}^*$ es un mínimo global de f en B

$\bar{x}^\circ$ es un máximo global de f en B

Programación convexa:

Dado el programa convexo

$$\begin{cases} Min\ f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ s.a \\ \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in B \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Se dice que:

Si $\bar{x} \in B$ es un mínimo local, entonces $\bar{x}$ es un mínimo global.

El conjunto de todos los mínimos del programa es un conjunto convexo. Para el problema de máximo se obtiene un resultado análogo sustituyendo el concepto de mínimo por el máximo.

DISCUSIÓN

Resolución Gráfica de Programas Matemáticos no lineales:

La resolución grafica de programas matemáticos no lineales admiten la siguiente formulación general.

Se dice que $\bar{x}^*$ es un mínimo local del programa si existe

$r > 0 / f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in \beta(\bar{x}^*, r) \cap B$

Definición (Conjuntos de Nivel)

Sea la función $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $k \in \mathbb{R}$ se define el conjunto de nivel k de f, es decir

$$S_k = \left\{ \bar{x} \in D / f(\bar{x}) = k \right\}$$

Definición (Conjunto factible)

Se define el conjunto factible de un programa como el conjunto de puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, que verifican la restricción del programa, es decir,

$B = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / h_i(x_1, ..., x_n) = 0; i = \overline{1, n};\right.$

$\left. g_j(x_1, ..., x_k) \leq 0, j = \overline{1, k} \right\}$

Definición (Máximo y Mínimo global)

Dado un programa matemático

$$\begin{cases} Opt\ f(x_1, x_2) \\ \bar{x} = (x_1, x_2) \in B \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Se dice que $\bar{x}^*$ es un máximo global del programa si se verifica

$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in B$

Se dice que $\bar{x}^*$ es un mínimo global del programa si se verifica $f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in B$

Se dice que $\bar{x}^*$ es un máximo global estricto del programa si se verifica $f(\bar{x}) < f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in B$

Se dice que $\bar{x}^*$ es un mínimo global estricto del programa si se verifica $f(\bar{x}) > f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in B$

Definición (Máximo y Mínimo local)

Dado un programa matemático

$$\begin{cases} Opt\ f(x_1, x_2) \\ \bar{x} = (x_1, x_2) \in B \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Se dice que $\bar{x}^*$ es un máximo local del programa si existe $r > 0 / f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in \beta(\bar{x}^*, r) \cap B$

Se dice que $\bar{x}^*$ es un máximo local estricto del programa si existe $r > 0 / f(\bar{x}) < f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in \beta(\bar{x}^*, r) \cap B,$ $\bar{x} \neq \bar{x}^*$

Se dice que $\bar{x}^*$ es un mínimo local estricto del programa si existe $r > 0 / f(\bar{x}) > f(\bar{x}^*), \forall \bar{x} \in \beta(\bar{x}^*, r) \cap B,$ $\bar{x} \neq \bar{x}^*$

Ejemplo (óptimo global) Dados el programa matemático no lineal

$$\begin{cases} Opt\ 9 - x_1^2 - x_2^2 \\ s.a \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se pide

a) Resolverlo gráficamente

b) Comprobación con el programa LINGO

Solución

Resolverlo gráficamente:
a1) Dibujar las curvas de nivel de la función objetivo:

$$S_k = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / f(x_1, x_2) = k \right\}$$
$$= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 9 - x_1^2 - x_2^2 = k, k \in \mathbb{R} \right\}$$
$$k = 0 \rightarrow 9 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 9$$
$$k = 1 \rightarrow 9 - x_1^2 - x_2^2 = 1 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 8$$
$$k = 2 \rightarrow 9 - x_1^2 - x_2^2 = 2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 7$$
$$k = 9 \rightarrow 9 - x_1^2 - x_2^2 = 9 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$$

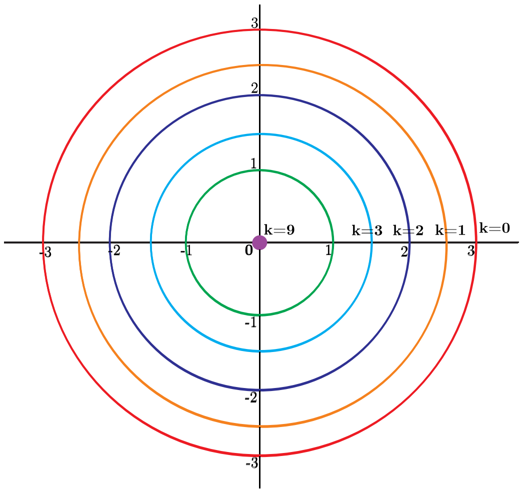


Figura 1. Conjunto de curvas de nivel
Fuente: Elaboración propia

Dibujar el conjunto de las soluciones factibles
$$B = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

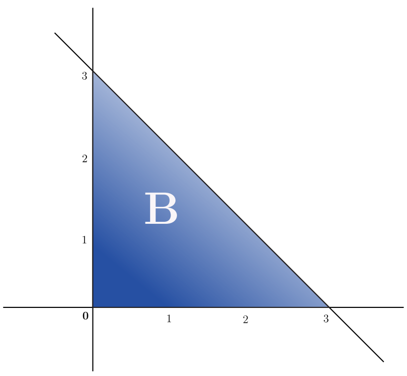
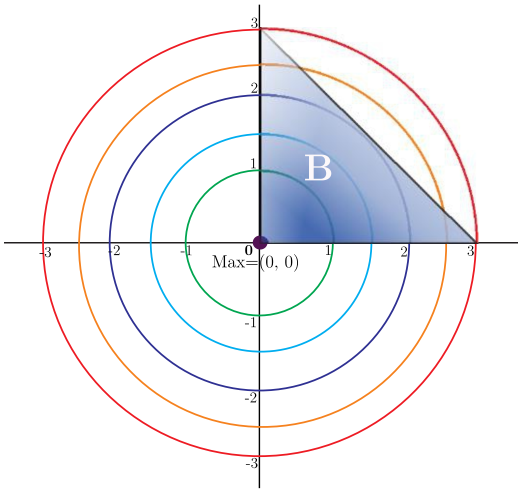


Figura 2. Conjunto de soluciones factibles
Fuente: Elaboración propia

Superposición de las figuras

Figura 3. Superposición de figuras



Fuente: Elaboración propia

En $\overline{x}^* = (0,0)$ existe un mínimo global y el valor de la función objetivo es $f(0,0) = 9$.

Comprobación con el software LINGO
Tabla 1. Programa cuadrático

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL
MAX = 9-X1^2-X2^2 ; **¡SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES;** X1 + X2 <= 3 ; X1>=0 ; X2>=0 ;

Fuente: Elaboración propia con software LINGO.

Tabla 2. Optimo global

Global optimal solution found		
Objetive value	9.000000	
Infeasibilities	0.1876777E-08	
Total solver iterations	4	
Elapsed runtime seconds	0.19	
Model is convex quadratic		
Model Class	QP	
Total variables	2	
Nonlinear variables	2	
Integer variables	0	
Total constraints	4	
Nonlinear constraints	1	
Total nonzeros	6	
Nonlinear nonzeros	2	
Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.1954444E-08	0.4144295E-08
X2	0.1954444E-08	0.4144295E-08
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.000000	1.000000
2	3.000000	0.000000
3	0.1954444E-08	0.000000

l conjunto de todos los mínimos del programa es un conjunto convexo. Para el problema de máximo se obtiene un resultado análogo sustituyendo el concepto de mínimo por el máximo.

Prueba

Fuente: Elaboración propia con software LINGO.

Condiciones de globalidad de programas matemáticos:

Definición (Conjunto acotado)

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ es acotado si existe

$$M > 0 / \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} < M, \forall \overline{x} \in C$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Definición (Conjunto Abierto)

Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathbb{R}^m$, si y solo si $\forall \overline{x} \in B, \exists r > 0$ tal que $B(\overline{x}, r) \subset B$

Definición (Conjunto Cerrado)

Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^m$ es cerrado si su complemento es abierto en $\mathbb{R}^m$

Criterio de Máximos y Mínimos Globales.
Teorema (Teorema de Weierstrass)

Sea $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en B, B es cerrado y acotado.
Entonces existen

$\overline{x}^* \in B$ tal que: $f(\overline{x}^*) \leq f(\overline{x}); \forall \overline{x} \in B$

$\overline{x}^\circ \in B$ tal que: $f(\overline{x}^\circ) \geq f(\overline{x}); \forall \overline{x} \in B$

Es decir:

$\overline{x}^*$ es un mínimo global de f en B

$\overline{x}^\circ$ es un máximo global de f en B

Programación convexa
Teorema (Teorema fundamental de la programación convexa)

Dado el programa convexo

$$\begin{cases} Min\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ s.a. \\ \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Se dice que:
Si $\overline{x} \in B$ es un mínimo local, entonces $\overline{x}$ es un mínimo global.
Supongamos que $\overline{x}_1$ es un mínimo local no global, entonces existe $\overline{x} \in B$ tal que $f(\overline{x}) < f(\overline{x}_1)$ .Como B es convexo, para todo $\lambda \in [0,1]$, se verifica que

$$\overline{z} = \lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{x}_1 \in B$$

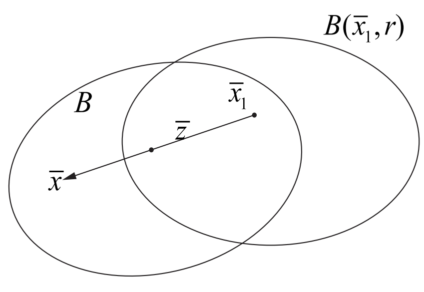


Figura 4. Conjunto convexo
Fuente: Elaboración propia

Para cada $r > 0$, existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\overline{z} \in B(\overline{x}_1, r) \cap B$ y por ser f convexa se tiene

$$f(\overline{z}) = f(\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{x}_1) \leq \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda) <$$
$$< f(\overline{x}_1) + (1-\lambda) f(\overline{x}_1) = f(\overline{x}_1)$$

, lo que contradice la hipótesis de que $\bar{x}_1$ es
, un mínimo local del programa.
Sea m el mínimo valor de f en el conjunto B y sea $S=\{\bar{x}\in B / f(\bar{x})=m\}$

Dados $\bar{x},\bar{x}_2\in B$ y $\lambda\in[0,1]$, se verifica que $\bar{z}=\lambda\bar{x}+(1-\lambda)\bar{x}_2\in S$ porque

$$m\leq f(\bar{z})=f(\lambda\bar{x}+(1-\lambda)\bar{x}_2)\leq$$
$$\leq\lambda f(\bar{x})+(1-\lambda)f(\bar{x}_2)=m$$

, entonces $f(\bar{z})=m$

Ejemplo (óptimo local)
Dado el programa

$$\begin{cases} Opt\ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\ s.a \\ -x_1+x_2\leq 1 \\ x_1+x_2\leq 2 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

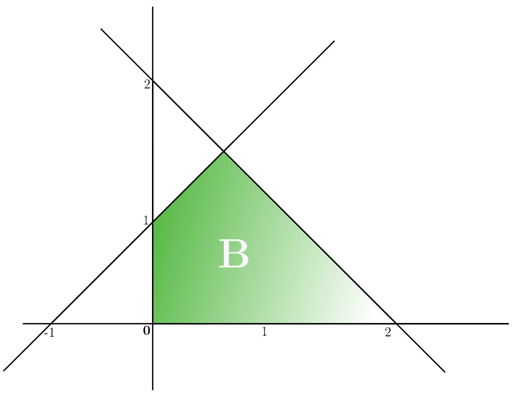


Figura 6. Conjunto de soluciones factibles

Resolverlo gráficamente

Estudiar analíticamente si verifica el teorema de Weierstrass

Comprobar con el software LINGO
Solución:
Gráficamente:
a1) Curvas de nivel de la función objetivo:

$$S_k=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / f(x_1,x_2)=k\}$$
$$=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / (x_1-1)^2+(x_2-2)^2=k, k\in\mathbb{R}\}$$
$$k<0\rightarrow S_k=\varnothing$$

$$k=0\rightarrow(x_1-1)^2+(x_2-2)^2=0$$
$$k=1\rightarrow(x_1-1)^2+(x_2-2)^2=1$$
$$k=2\rightarrow(x_1-1)^2+(x_2-2)^2=2$$
$$k=5\rightarrow(x_1-1)^2+(x_2-2)^2=5$$

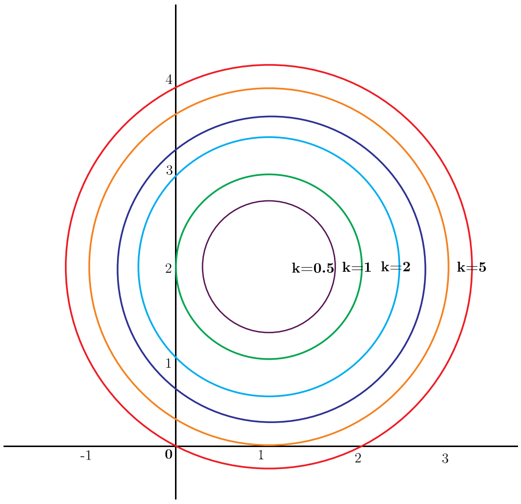


Figura 5. Conjunto de curvas de nivel
Fuente: Elaboración propia

a2) Dibujo del conjunto de las soluciones factibles
$$B=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / -x_1+x_2\leq 1, x_1+x_2\leq 2, x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$$

Fuente: Elaboración propia

a3) Superposición de las figuras

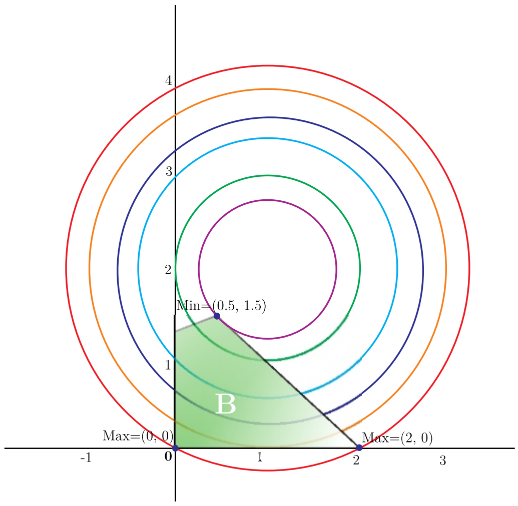


Figura 7. Superposición de figuras
Fuente: Elaboración propia

Existe un mínimo global en la intersección de las rectas $-x_1+x_2=1$ y $x_1+x_2=2$

$$Entonces, x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{2}$$

Luego en $\bar{x}^*=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ existe un mínimo global y el valor de la función objetivo es $f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)$

En los puntos $\bar{x}^*=(0,0)$ y $\bar{x}^*=(2,0)$ existen máximos globales y el valor de la función es $f(0,0)=f(2,0)=5$.

Analíticamente:
Veamos que en este caso si cumple las tres hipótesis del teorema (Weierstrass)

b1) f debe ser continua

En efecto, $f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2$ es continua por ser una función polinómica.

b2) B es cerrado

En efecto, $g_1(x_1,x_2)=-x_1+x_2$, $g_2(x_1,x_2)=x_1+x_2, g_3(x_1,x_2)=x_1, g_4(x_1,x_2)=x_2$, son funciones continuas, entonces

$g_1^{-1}\{(-\infty,1]\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/ -x_1+x_2\leq 1\}$, cerrado

$g_2^{-1}\{(-\infty,2]\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/ x_1+x_2\leq 2\}$, cerrado

$g_3^{-1}\{[0,+\infty\rangle\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_1\geq 0\}$, cerrado

$g_4^{-1}\{[0,+\infty\rangle\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_2\geq 0\}$, cerrado

b3) B es un conjunto acotado porque $\exists M=\sqrt{5}>0 / \|\bar{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leq\sqrt{5}, \forall\bar{x}\in B$.

Como se cumplen las tres condiciones del teorema de Weierstrass, el programa dado tiene máximo y mínimo global.

c) Comprobación con el software LINGO

Tabla 3. Programa cuadrático

PROGRAMA MATEMÁTICO NO LINEAL
MAX = (X1-1)^2+(X2-2)^2; **¡SUJETO A LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES;** -X1 + X2 <= 1 ; X1+X2 <=2; X1 >=0; X2 >=0;

Fuente: Elaboración propia con software LINGO.

Tabla 4. óptimo local

Local optimal solution found		
Objetive value	5.000000	
Infeasibilities	0.000000	
Total solver iterations	22	
Elapsed runtime seconds	1.25	
Model is convex quadratic		
Model Class	QP	
Total variables	2	
Nonlinear variables	2	
Integer variables	0	
Total constraints	5	
Nonlinear constraints	1	
Total nonzeros	8	
Nonlinear nonzeros	2	
Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	2.000000
X2	0.000000	4.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	5.000000	1.000000
2	1.000000	0.000000
3	2.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000

Fuente: Elaboración propia con software LINGO.

CONCLUSIONES

El teorema de Weierstrass nos da la existencia de máximos y mínimos globales en el estudio de la resolución de programas matemáticos no lineales.

El teorema de la Programación convexa nos da la convexidad del programa en el que todo óptimo local sea global.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T. *Calculus, Vols. I yII, 2nd Edition,* Reverté, 1973.

AVRIEL, Mordecai. *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Dover Publishing.2003

BERNOULLI, J. y Leibniz, G. W. *Philosophicum et mathematicum.1745*

BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear Programming: 2nd Edition.* Athena. Scientific.1999

BALBAS, A y Gil, J. A. *Programación matematica,* Editorial AC.1987

BARBOLLA, Rosa. *Optimización*. PEARSON EDUCACIÓN, S.A, Madrid 2001

CHIANG, A. *Metodos fundamentals de economia matemática, 3ra edición,* McGraw Hill.1987

DANTZIG. *Linear Programming and extensions*, Princeton ,1963

GUERRERO Casas, F. Curso de Optimización: *Programación matemática,* Ariel economía.1997

HILLER F. y Lieberman G. *Introducción a la Investigación de Operaciones*, México: Mc Graw Hill.1967

INTRILIGATOR, M. *Optimización matemática y teoria economica*, Prentice-Hall.1973

LAGRANGE, J. L. *Elementary Mathematics*, Chicago,1901

NOCEDAL, J. and Wright, S. J. *Numerical Optimization.* Springer.1999

TAHA H. *Investigación de Operaciones,* México: Pearson *1995.*

WEIERSTRASS, K. *Mathematische werke*, Berlin,1894