CRITERIO DE ESTABILIDAD Y ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE LA SOLUCIÓN EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES AUTÓNOMOS NO LINEALES

CRITERION OF STABILITY AND ASYMPTOTIC STABILITY OF THE SOLUTION IN THE SYSTEMS OF INDEPENDENT NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Jhony Alfonso Chávez Delgado[10],
Eduardo Rodríguez Delgado[11],
Luis Cesar Méndez Avalos[12]

RESUMEN

El propósito de este artículo es establecer la estabilidad y la estabilidad asintótica de la solución en los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos no lineales, sin conocer la solución del sistema. Pero presenta dificultad dicha estabilidad como por ejemplo no se tiene una matriz cuadrada no singular disponible para determinar la estabilidad y estabilidad asintótica, salvo que hallemos efectivamente todas las soluciones del sistema, lo que puede resultar difícil si no imposible. Sin embargo se estableció un criterio de estabilidad y estabilidad asintótica a través de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal lo cual es posible obtenerlo por medio de las propiedades de una función multivariable de Liapunov. Esta función multivariable tiene las propiedades de que es una función real de variable vectorial en la que en un punto de equilibrio se anula y tiene un mínimo local estricto, y además la función multivariable decrece a lo largo de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales autónomas no lineales. Estas funciones multivariables de Liapunov se justifican principalmente por la importancia que tiene en las investigaciones realizadas como por ejemplo en la construcción de un control analítico para dar la globalidad óptima a un cuerpo rígido con un punto fijo, para la estabilidad de la precisión y la rotación permanente de un giroscopio, y el estudio regulador de una máquina a vapor.

Palabras clave: función multivariable de Liapunov, estabilidad, estabilidad asintótica

ABSTRACT

The purpose of this article is to establish the stability and asymptotic stability of the solution in the systems of non-linear autonomous differential equations without knowing the solution of the system. But such stability presents difficulty as for example we do not have a non-singular square matrix available to determine the stability and asymptotic stability, unless we effectively find all the solutions of the system, which can be difficult if not impossible. However, a criterion of stability and asymptotic stability was established through the equilibrium points of a nonlinear autonomous system, which is possible to obtain it by means of the properties of a multivariable

[10] Maestro en Ciencias con mención en Matemáticas. Docente de la Facultad de Ciencias-Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann –Tacna Perú

[11] Magister en Microelectrónica. Docente de la Facultad de Ciencias-Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann –Tacna Perú

[12] Licenciado en matemáticas. Docente de la Facultad de Ciencias Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann Tacna Perú

function of Liapunov. This multivariable function has the properties that it is a real function of a vector variable in which at a point of equilibrium it is nullified and has and asymptotic stability was established through the equilibrium points of a nonlinear autonomous system, which is possible to obtain it by means of the properties of a multivariable function of Liapunov. This multivariable function has the properties that it is a real function of a vector variable in which at a point of equilibrium it is nullified and has a strict local minimum, and also the multivariable function decreases along the solution of the system of autonomous differential equations non-linear These multivariable functions of Liapunov are mainly justified by the importance that it has in the investigations carried out as for example in the construction of an analytical control to give the optimal globality to a rigid body with a fixed point, for the stability of the precision and rotation permanent of a gyroscope, and the regulatory study of a steam engine.

Key words: Liapunov multivariable function, stability, asymptotic stability

INTRODUCCIÓN

Un sistema autónomo no lineal es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con campo vectorial independiente del tiempo, y se representan de la forma siguiente

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{F}(\mathrm{x}) \qquad (1.1)$$

Donde $\mathrm{F}: \mathrm{W} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ es una aplicación de clase C^1 en un conjunto abierto $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

El análisis del sistema autónomo no lineal (1.1), se reduce al estudio de tres aspectos fundamentales, los cuales son: Existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio.

Especial interés son los puntos de equilibrio, que son aquellos estados que no cambian con el tiempo, es decir, la función constante que es idénticamente igual al punto de equilibrio es una solución del sistema autónomo y su trayectoria asociada se reducirá a un punto. Esto implica que el punto de equilibrio se anula en el campo vectorial (Hirsh, 1983).

En estos términos, el problema de la teoría de la estabilidad y estabilidad asintótica es determinar las condiciones bajo las cuales una solución del sistema autónomo que se origina cerca de un punto de equilibrio de este sistema, permanecen cerca de ese punto, en cuyo caso decimos, que el punto de equilibrio es estable. Si además existe la posibilidad que tiendan hacia él con el transcurso del tiempo, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable. En caso contrario se dice que el punto de equilibrio es inestable.

La estabilidad y estabilidad asintótica del único punto de equilibrio del sistema autónomo lineal, se puede determinar examinando los auto valores de la matriz cuadrada no singular. Será estable si la matriz tiene al menos un par de valores propios imaginarios puros de multiplicidad singular, o ningún par de valores propios imaginarios de multiplicidad múltiple, y ningún valor propio con partes lineales positivas. Así mismo, será asintóticamente estable si las partes reales de todos los valores propios de la matriz cuadrada no singular son negativos, y será Inestable, en cualquier otro caso (Kleider, 1978).

Pero, una dificultad presenta la estabilidad y la estabilidad asintótica para sistemas autónomos no lineales, como por ejemplo, no se tiene una matriz cuadrada no singular disponible para su análisis. Así, frente a esta dificultad, determinar la estabilidad y la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio es un problema delicado, ya que no disponemos hasta ahora de ningún medio para determinar la estabilidad, salvo que hallemos efectivamente todas las soluciones del sistema autónomo no lineal, lo que puede resultar difícil si no imposible.

Investigaciones realizadas sobre estabilidad se basaron en el hecho bien conocido, de que un sistema físico pierde energía potencial en la vecindad de un punto de equilibrio estable. Más precisamente, un punto de equilibrio estable para un sistema físico es un punto en que la energía potencial del sistema tiene un mínimo local (hecho que se conoce en física como el teorema de Lagrange). La idea fue generalizada con un método muy útil para estudiar la estabilidad de un sistema autónomo no lineal, por medio de las propiedades de una cierta función, denominada función multivariable de Liapunov y esto se hace sin conocer las soluciones del sistema. Así, en caso donde las soluciones son imposibles podemos sin embargo obtener información valiosa sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, si logramos construir su función del tipo multivariable (Hirsh, 1983).

Este artículo, contribuye a estudiar la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio del sistema autónomo no lineal sin resolver el sistema que ha sido estudiado por matemático como Elsgolts (1979), Krasnov (1978), La Salle (1973), Mello (1979), Peixoto (1978), Pontryagin (1980), Sotomayor (1979) y otros.

Así mismo, permitirá superar las dificultades que se presenten al estudiar la estabilidad de algunos fenómenos físicos que son representados mediante un sistema autónomo: circuitos eléctricos, campos de fuerzas conservativas, movimiento de un péndulo, electrónica, control, entre otros.

MARCO TEÓRICO

Definición (Punto de equilibrio) Un punto $\mathrm{x}^* \in \mathrm{W}$, se dice que es un punto de equilibrio del sistema autónomo no lineal (1.1) si $\mathrm{F}(\mathrm{x}^*) = 0$.

Definición (Estabilidad) Un punto de equilibrio x^* del sistema autónomo no lineal (1.1) es estable, cuando para toda vecindad U de x^* en W existe una vecindad U_1 de x^* tal que toda solución $x(t)$ de (1.1) con $\mathrm{x}(0) \in U_1$ está definida en U para todo t > 0. Se representa en la siguiente figura 1

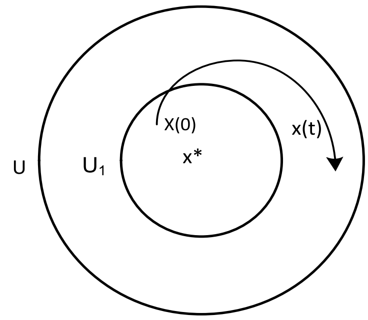

Figura1. Punto de equilibrio estable
Fuente: Elaboración propia

Definición (Estabilidad asintótica) Un punto de equilibrio x^* del sistema autónomo no lineal (1.1) es asintóticamente estable si x^* es estable y existe una vecindad $\mathrm{U}_2(\mathrm{x}^*) \subset \mathrm{U}_1(\mathrm{x}^*)$ tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$. Se representa en la siguiente figura 2

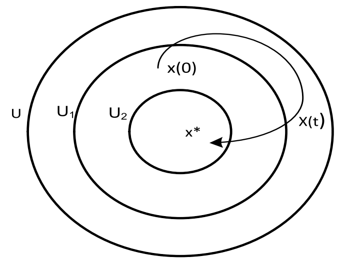

Figura2. Punto de equilibrio asintóticamente estable
Fuente: Elaboración propia

Definición (Inestabilidad) Un punto de equilibrio x^* , del sistema autónomo no lineal (1.1.), que no es estable se llama inestable. Se representa en la siguiente figura 3

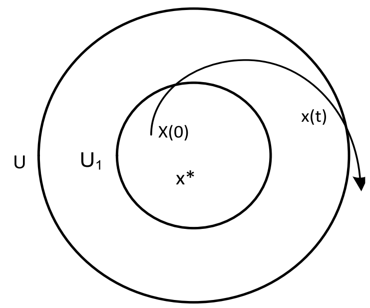

Figura3. Punto de equilibrio inestable
Fuente: Elaboración propia

Definición (Función multivariable de Liapunov) Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio del sistema autónomo no lineal

(1.1). Una función multivariable, denominada de Liapunov, es una función $V: U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable definida en una vecindad U de $\bar{x}$, que satisface las siguientes condiciones:
(a)$V(\bar{x}) = 0; V(x) > 0 \; \forall x \neq \bar{x}$;
(b) $\dot{V}(\bar{x}) \leq 0$, en $U(\bar{x})$;
Además una función multivariable es estricta si:
(c) $\dot{V}(\bar{x}) < 0$, en $U(\bar{x}) \backslash \{\bar{x}\}$.
(Hirsh, 1983)

Criterio de Estabilidad y Estabilidad asintótica
Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio del sistema autónomo no lineal $\dot{x} = F(x)$ y sea $V: U(\bar{x}) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una vecindad $U(\bar{x}) \subset W$, tal que:
(a) Si V es una función multivariable en el punto $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es estable.
(b) Si V es una función multivariable estricta en el punto $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable (Hirsh ,1983).

MATERIAL Y MÉTODOS

Para nuestro artículo es considerado material de estudio los sistemas autónomos no lineales que son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con campo vectorial independiente del tiempo, y está dado por (1.1)

El método usado es el método axiomático-deductivo, el mismo que permite establecer un conjunto de reglas de razonamiento, de enunciados, postulados a partir de los cuales y por reglas de inferencia del sistema se derivan otros enunciados o proposiciones (Guardales ,2004).

RESULTADOS

Función multivariable de Liapunov estricta
Si $V: U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida por $V(x;y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es asintóticamente estable del sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases}$$

Si $V: U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida por $V(x;y) = (x^2 + y^2)$, entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es asintóticamente estable del sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^2 y \\ \dot{y} = -y + y^2 x. \end{cases}$$

Si $V: U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida por $V(x;y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ entonces la ecuación de Van der Pol, $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ $(\varepsilon < 0)$, tiene en el $(0;0)$ un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Aplicación a un circuito eléctrico RLC
Si $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función que representa la energía total de un circuito eléctrico simple RLC definido por $E(x;y) = \frac{1}{2C}(LCy + x^2)$ .Entonces E es una función multivariable de Liapunov para el punto de equilibrio $(0;0)$ del sistema eléctrico simple **RLC**.

DISCUSIÓN

La matemática, en tanto es una ciencia eidética o formal - como dice Bunge - utiliza el método deductivo, es decir, que mediante deducciones lógicas, obtiene verdades o afirmaciones a partir de axiomas previamente formuladas.

Proposición1. Si $V: U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida por $V(x;y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es asintóticamente estable del sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases}$$

Prueba
Por hipótesis se tiene que la función real de variable vectorial:

$$V(x;y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Ahora tenemos que verificar las condiciones de la definición (función multivariable de Liapunov), y seguidamente aplicar el Criterio (Estabilidad y estabilidad asintótica). En efecto
(a) $V(0;0) = 0$ y $V(x;y) > 0 \; \forall \; (x;y) \neq (0;0)$

(b) $\dot{V}(x;y) = \frac{1}{2}(2x\dot{x} + 2y\dot{y})$
$= -(x^2 + y^2) + (x^2y + xy^2)$.
Observemos que en los reales se cumple:
$$x < 1, y \neq 0 \Rightarrow xy^2 < y^2.$$
de igual manera si
$$y < 1, x \neq 0 \Rightarrow x^2y < x^2.$$
Luego, si $x < 1, y < 1$ e $(x;y) \neq (0;0)$ entonces
$$x^2y + xy^2 < x^2 + y^2$$
En consecuencia, $-(x^2 + y^2) + (x^2y + xy^2) < 0$
Por tanto $\dot{V}(x;y) \leq 0$ en la vecindad
$$U(0;0) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/x < 1, y < 1\}$$
Luego, por el Criterio (estabilidad y estabilidad asintótica) parte (a) el origen $(0;0)$ es estable.
Además la función multivariable es estricta:
(c) $\dot{V}(x;y) < 0$ en la vecindad
$U(0;0) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/x < 1, y < 1\}\backslash\{(0;0)\}$.
Por lo tanto, por el Criterio (estabilidad y estabilidad asintótica) parte (b) el origen $(0;0)$es asintóticamente estable.

Proposición2. Si $V: U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida por V (x; y) = $x^2 + y^2$, entonces el punto de equilibrio $(0;0)$ es asintóticamente estable del sistema autónomo no lineal
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^2 y \\ \dot{y} = -y + y^2 x. \end{cases}$$

Prueba
En efecto por hipótesis
$$V(x;y) = (x^2 + y^2)$$
, es una función multivariable para el origen, es decir cumple las condiciones (a) y (b) de la definición (función mutivariable de Liapunov):
(a) $V(0;0) = 0$ y $V(x;y) > 0\ \forall\ (x;y) \neq (0;0)$
(b) $\dot{V}(x;y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2(x^2 + y^2)(xy - 1)$
De donde $\dot{V}(x;y) < 0$ en la vecindad
$$U(0;0) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/xy < 1\}$$
Luego, por el Criterio (Estabilidad y estabilidad asintótica) parte (a), el origen es estable.
Además la función multivariable es estricta:
(c) $\dot{V}(x;y) < 0$ en la vecindad
$$U(0;0) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/xy < 1\}\backslash\{(0;0)\}$$
Por lo tanto, por el Criterio (estabilidad y estabilidad asintótica) parte (b), el origen $(0;0)$ es asintóticamente estable.

Proposición3. Si $V: U(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida por $V(x;y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, entonces la ecuación de Van der Pol,
$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0\ \ (\varepsilon < 0),$$
tiene en él $(0;0)$ un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Prueba
Sea la ecuación de Van der Pol
$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0\ \ (\varepsilon < 0),$$
La ecuación equivalente en términos de x, y es
$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right), \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$
El análisis de este sistema no lineal comienza por el punto de equilibrio $\bar{x} = (0;0)$. Ahora tomemos la función multivariable de Liapunov
$$V(x;y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$
para este punto de equilibrio, mostraremos que la función así construida satisface las condiciones de la definición (Función multivariable de Liapunov) y los requerimientos del Criterio (Estabilidad y estabilidad asintótica)
En efecto:
(a) $V(0;0) = 0$ y $V(x;y) > 0\ \forall\ (x;y) \neq (0;0)$
(b) $\dot{V}(x;y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -\varepsilon x^2\left(\frac{x^2}{3} - 1\right)$
Es evidente que
$\dot{V}(x;y) \leq 0$, en la vecindad
$$U(0;0) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 < 3\}$$
y por el Criterio (Estabilidad) parte(a), el origen $(0;0)$ es estable.
Además la función multivariable es estricta:
(c) $\dot{V}(x;y) < 0$, en la vecindad
$$U(0;0) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 < 3\}\backslash\{(0;0)\}$$
Por lo tanto, por el criterio (estabilidad y estabilidad asintótica) parte (b), el origen $(0;0)$ es asintóticamente estable.

Proposición4. Si $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función que representa la energía total de un circuito eléctrico simple RLC definido por

$E(x;y) = \frac{1}{2C}(LCy + x^2)$ .Entonces E es una función multivariable de Liapunov para el punto de equilibrio $(0;0)$ del sistema eléctrico simple RLC.

Prueba

Consideremos el circuito eléctrico simple que consiste de una inductancia L, un condensador C y una resistencia R tal como se muestra en la figura 4. Entonces la función multivariable del circuito eléctrico simple se representa mediante la energía total

$$E(x;y) = \frac{1}{2C}(LCy + x^2)$$

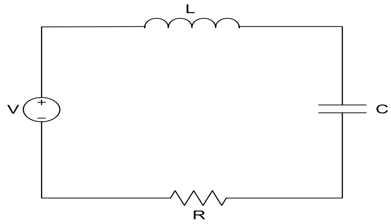

Figura 4. Circuito eléctrico simple RLC
Fuente: Elaboración propia

La caída de voltaje a través de la resistencia es Ri

La caída de voltaje a través del inductor es $L\frac{di}{dt}$

La caída de voltaje a través del condensador es $\frac{x}{C}$

La caída de voltaje a través de un generador es -G

Por lo tanto, por la ley de Kirchhoff,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{x}{C} = G$$

(1.2)

Supongamos que $G = 0$, e $i = dx/dt$, entonces la ecuación diferencial (1.2) se convierte en

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{x}{C} = 0$$

la cual gobierna el comportamiento de un circuito eléctrico simple RLC; cuando x representa la carga sobre el condensador, y $\dot{x}$ la intensidad de corriente .

Introduciendo una nueva variable $y = \dot{x}$ (Interpretada como intensidad de corriente), obtenemos el sistema de primer orden equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{-1}{LC}x - \frac{R}{L}y. \end{cases}$$

Esta ecuación autónoma en $\mathbb{R}^2$ tiene como punto de equilibrio $\overline{x} = (0;0)$.

Como función multivariable para este punto de equilibrio ensayamos la energía total E:

E= energía cinética + energía potencial

donde la Energía cinética $= mv^2 = \frac{1}{2}Ly$, y la energía potencial (o energía almacenada en el condensador) está dada por

$$\int_0^x \frac{x}{C}dx = \frac{1}{2C}x^2$$

Así, tenemos la energía total

$$E(x;y) = \frac{1}{2C}(LCy + x^2)$$

E es una función multivariable, puesto que satisface la definición de función multivariable de Liapunov.En efecto,

(a)$E(0;0) = 0, E(x;y) > 0\ \forall(x;y) \neq (0;0)$

(b) $\dot{E}(x;y) = \frac{1}{c}xy + Ly\left(-\frac{x}{LC} - \frac{Ry}{L}\right) = -Ry^2$

, donde $\dot{E}(x;y) \leq 0$ en una vecindad de $U(0;0)$.

En virtud del Criterio (Estabilidad y estabilidad asintótica), el punto de equilibrio $\bar{x} = (0;0)$ es estable.

CONCLUSIONES

La estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal consiste en construir funciones multivariables de Liapunov sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Si la función multivariable de Liapunov es estricta, entonces el punto de equilibrio de un sistema autónomo no lineal es asintóticamente estable.

No existe un método único ni definitivo para encontrar funciones multivariables para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Elsgolts, L. (1979). Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Mir, Moscú.

Guardales Garcia , Roger.(2004). Investigación y enseñanza de la matemática.Sociedad matematica peruana.Primera ed.Peru

Hirsh, M. (1983).Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámico y Álgebra Lineal. Alianza Editorial, Madrid.

Kreider, D. (1978). Ecuaciones Diferenciales. Fondo educativo inter-americano, México.

Krasnov, L. (1978). Teoría de la Estabilidad, Reverte, Barcelona.

La Salle, J. (1973). Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. Academic Press, New York.

Mello, A. (1979).Ecuaciones Diferenciales. Imeusp, Brasil.

Peixoto, M. (1978). Dynamical Systems. Academic Press, Nueva York.

Perko, L. (1991). Differential Equations and Dynamical Systems, Springer Verlag, New York.

Pontryagin, I. (1980). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Addison Werley, Reading, Masachussetts.

Sotomayor, J. (1979). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Euclides, Brasil.
VPO